19. REPUBLIČKO TAKMIČENJE IZ FIZIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA REPUBLIKE SRPSKE (Bijeljina, 12. maj 2012)

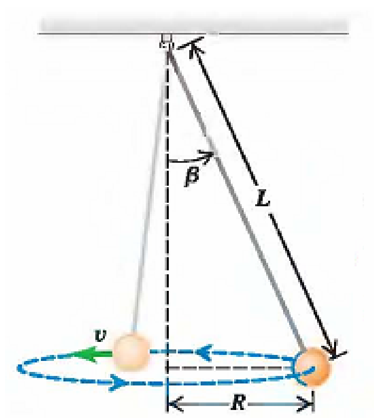
I RAZRED

1. Dvije elastične kuglice čije mase su $m_1=100g$ i $m_2=300g$ obješenu su o istu tačku nitima jednake dužine $k=50cm$. Prvu kuglicu izvedemo iz ravnotežnog položaja za ugao od 90^0 i pustimo. Izračunati visine na koju se podignu kuglice poslije sudara.

2. Kakav je odnos početnih brzina v_{0z}/v_{0m} kojima bi trebali baciti vertikalno uvis tijela na površini Zemlje i površini Mjeseca, pa da maksimalne visine penjanja budu u oba slučaja iste? Prečnik Meseca je *3.8 puta* manji od prečnika Zemlje, a njegova gustina iznosi *3/5* gustine Zemlje.

3. Tijelo je bačeno brzinom od $12m/s$ uz strmu ravan nagibnog ugla 45^0. Izračunati poslije koliko vremena će se tijelo vratiti u polaznu tačku, ako je koeficijent trenja 0.3?
a) zadatak riješiti preko njutnovih zakona dinamike
b) zadatak riješiti preko zakona održanja energije

4. Kuglica mase m je obješena o nit i rotira konstantnom linearnom brzinom v u horizontalnoj ravni. Pronaći period tijela u zavisnosti od dužine niti l i ugla β za koje je otklonjeno klatno u odnosu na ravnotežan položaj.



5. Sa vertikalne stijene visoke $H=40m$, bačen je u more kamen početnom brzinom $v_0=25\ m/s$. Pravac brzine zaklapa sa horizontalom ugao od 35^0.
a) Na kom rastojanju od podnožja stijene će kamen pasti u vodu?
b) Poslije kog vremena od početka bacanja će kamen biti na visini $h=10m$ nad vodom?
c) Kakav je smjer i intenzitet brzine kamena u momentu pada u vodu?

Svaki tačno riješen zadatak donosi 20 poena.

Zadatke pripremio: Aleksandar Janković

RJEŠENJA ZADATAKA ZA I RAZRED

1. Brzine kuglica neposredno prije sudara su:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gk} \qquad \upsilon_2 = 0 \tag{1}$$

Neka su h_1 i h_2 visine do kojih se popnu kuglice poslije sudara. Ove su veličine su povezane sa brzinama v'_1 i v'_2 nposredno poslije sudara, relacijama:

$$\upsilon_1^{'} = \sqrt{2gh_1} \qquad \upsilon_2^{'} = \sqrt{2gh_2} \tag{2}$$

Kod sudara važi zakon održanja količine kretanja, koji je dat jednačinom:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1^{'} + m_2\upsilon_2^{'}$$

Uvrštavanjem relacija (1) i (2) u gornju jednačinu dobija se:

$$m_1\sqrt{k} = m_1\sqrt{h_1} + m_2\sqrt{h_2} \qquad \text{(5p)} \tag{3}$$

S obzirom da je sudar elastičan važiće i zakon održanja energije. Neposredno prije i poslije sudara, tijela imaju samo kinetičku energiju:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^{'2}$$

Tj uvrštavanjem izraza (1) i (2) u gornju relaciju dobija se:

$$m_1k = m_1h_1 + m_2h_2 \tag{4}$$

Iz jednačine (4), visina dokle će dospijeti prvo tijelo jednaka je:

$$h_1 = \frac{m_1k - m_2h_2}{m_1} \qquad \text{(5p)}$$

Uvrštavanjem u jednačinu (3), dobija se:

$$m_1\sqrt{k} = m_1\sqrt{\frac{m_1k - m_2h_2}{m_1}} + m_2\sqrt{h_2}$$

Prebacivanjem člana $m_2\sqrt{h_2}$ na lijevu stranu i kvadriranjem gornje jednačine, a zatim njenim sređivanje dobija se:

$$h_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 k = 0.125m$$

$$h_1 = \frac{m_1k - m_2h_2}{m_1} = 0125m \qquad \text{(10p)}$$

2. Kod vertikalnog hica, maksimalna visina do koje tijelo stiže je data sa formulom $h=v_0^2/2g$. Da bismo na Mjesecu i na Zemlji dobili jednake visine penjanja, mora biti:

$$\frac{\upsilon_{0m}^2}{2g_m} = \frac{\upsilon_{0z}^2}{2g_z}$$

Tj. odnos početnih brzina treba biti jednak kvadratnom korjenu odnosa gravitacionih ubrzanja:

$$\frac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0m}} = \sqrt{\frac{g_z}{g_m}} \qquad \text{(5p)} \tag{1}$$

U ovim formulana g_z i g_m su gravitaciona ubrzanja na površini Zemlje i Mjeseca, respektivno. Gravitaciono ubrzanje na nekoj planeti, može se dovesti u vezu sa masom te planete i njenim poluprečnikom iz uslova:

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{R^2} \qquad \text{(2p)}$$

$$\frac{g_z}{g_m} = \frac{G\dfrac{M_z}{R_z^2}}{G\dfrac{M_m}{R_m^2}} = \frac{M_z}{M_m}\left(\frac{R_m^2}{R_z^2}\right) = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho_z R_z^3}{\frac{4}{3}\pi\rho_m R_m^3}\left(\frac{R_m}{R_Z}\right)^2 = \frac{\rho_z}{\rho_m}\frac{R_z}{R_m}$$

(8p)

Ovdje su mase planeta izražene kao proizvod gustine i zapremine sfere.

$$\frac{g_z}{g_m} = \frac{\rho_z}{\rho_m}\frac{R_z}{R_m} = \frac{1}{\frac{3}{5}}3.8 = 6.33$$

Prema tomoe na osnovu jednačine jedan dobijamo:

$$\frac{\upsilon_{0z}}{\upsilon_{0m}} = \sqrt{\frac{g_z}{g_m}} = \sqrt{6.33} = 2.52$$

(5p)

Dakle tijelu na Zemlji treba saopštiti približno 2.5 veću početnu brzinu nego na Mjesecu, da bi dostiglo istu maksimalnu visinu penjaja pri vertikalnom hicu.

3.

a) Prilikom kretanja tijela uz strmu ravan njega usporavaju sila trenja i horizontalna komponenta težine tijela. Postavljanjem koordinatnog sistema tako da se koordinatni početak nalazi u početnom položaju tijela i tako da je x osa paralelna sa podlogom i da prati smjer kretanja tijela, razlaganjem sila koje djeluju u x pravcu dobija se:

$$\sum F_x = ma_x = -\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

$$a_x = -0.3\cdot 9.81\frac{m}{s^2}\cos 45^0 - 9.81\frac{m}{s^2}\sin 45^0 = -9\frac{m}{s^2}$$

(2p)

U momentu kada se tijelo nađe u tački maksimalno udaljenoj od polaznog položaja, njegova brzina je jednaka nuli, tj može se pisati:

$$0 = \upsilon_{0x} + a_x t \Rightarrow t = \frac{\upsilon_{0x}}{-a_x} = \frac{12\frac{m}{s}}{-\left(-9\frac{m}{s^2}\right)} = 1.33s$$

Tijelo je prešlo put uz strmu ravan jednak:

$$x = \upsilon_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 12\frac{m}{s}1.33s + \frac{1}{2}\left(-9\frac{m}{s^2}\right)\left(1.33s^2\right) = 8m$$ (2p)

Poslije pređenih osam metara, tijelo se vraća niz strmu ravan. U ovom slučaju koordinatni sitem orijentišemo tako da se koordinatni početak sada nalazi u najudaljenoj tački od polaznog položaja, a x osu opet upravimo paralelno sa podlogom i u smjeru kretanja tijela. Tada na njega djeluju takođe iste sile kao i u slučaju kada se tijelo kretalo uz strmu ravan, samo što je sada sila trenja suprotno orijentisana, pa prema II Njutnovom zakonu važi:

$$F_x' = ma_x' = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$a_x' = 9.81\frac{m}{s^2}\sin 45^0 - 0.3\cdot 9.81\frac{m}{s^2}\cos 45^0$$

$$a_x' = 4.86\frac{m}{s^2}$$

(2p)

Brzina tijela kada se ponovo nađe u polaznom položaju biće jednaka:

$$\upsilon_x'^2 = \upsilon_{0x}'^2 + 2a_x'x = 2a_x'x \Rightarrow \upsilon_x' = \sqrt{2a_x'x} = 8.8\frac{m}{s}$$

Pređeni put ostaje isti, kao i u slučaju kad se tijelo kreće uz strmu ravan. Vrijeme kretanja tijela niz strmu ravan je jednako:

$$\upsilon_x' = \upsilon_{0x}' + a_x' t' \Rightarrow t' = \frac{\upsilon_x'}{a_x'} = \frac{8.8\frac{m}{s}}{4.86\frac{m}{s^2}} = 1.82s$$ (2p)

Ukupno vrijeme kretanja tijela jednako je:

$$T = t + t' = 3.15s$$ (2p)

b) Referentni nivo u odnosu na koji se računa potencijalna energija je postavljen u nivou podnožja strme ravni. Tri karakteristične tačke za koje se računa ukupna mehanička energija su: tačka 1 – u početnom položaju tijela, tačka 2 –u kojoj se tijelo nalazi najudaljenije od početnog položaja, tačka 3 –u kojoj se tijelo ponovo nalazi u početnom položaju. Od tačke 1 do tačke 2 ukupna mehanička energija se ne održava jer djeluje sila trenja koja je nekonzervativna:

$$E_1 + A_{12} = E_2$$

U tački jedan tijelo ima samo kinetičku energiju, a u tački dva samo potencijalnu, rad sile trenja je negativan, jer je smjer djelovanja sile trenja suprotno smjeru kretanja tijela:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \mu mg\cos\alpha \cdot s = mgh$$

Iz pravouglog trougla visina do koje dospije tijelo se može izraziti kao h=s·sinα, pa prethodna jednačina poprima oblik:

$$\frac{1}{2}\upsilon_1^2 - \mu g\cos\alpha \cdot s = gs\cdot\sin\alpha \Rightarrow s = \frac{\upsilon_1^2}{2\cdot(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)} = 8m$$ (2p)

Iz ovoga će vrijeme potrebno da tijelo pređe ovaj put uz strmu ravan biti jednako:

$$t = \frac{2s}{\upsilon + \upsilon_0} \Rightarrow t = \frac{2s}{\upsilon_2 + \upsilon_1} = \frac{2s}{\upsilon_1} = 1.33s$$ (2p)

Jer je krajnja brzina $v=v_2=0$, a početna brzina $v_0=v_1$.

Od tačke dva do tačke tri ukupna mehanička energija sistema se takođe ne održava, jer djeluje sila trenja koja je nekonzervativna sila, koja je i u ovom slučaju je usmjerena suprotno kretanju tijela:

$$E_2 + A_{23} = E_3$$

$$mgh - \mu mg\cos\alpha \cdot s = \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 \Rightarrow gs\cdot\sin\alpha - \mu g\cos\alpha \cdot s = \frac{1}{2}\upsilon_3^2$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{2gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 8.8\frac{m}{s}$$ (2p)

Iz ovoga će vrijeme potrebno da tijelo pređe put niz strmu ravan biti jednako:

$$t' = \frac{2s}{\upsilon + \upsilon_0} \Rightarrow t' = \frac{2s}{\upsilon_3 + \upsilon_2} = \frac{2s}{\upsilon_3} = 1.82s$$ (2p)

Jer je krajnja brzina $v=v_3$, a početna brzina $v_0=v_2=0$.

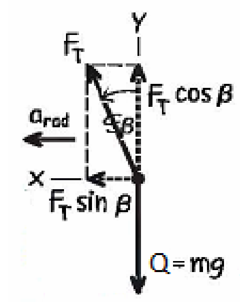
Ukupno vrijeme kretanja tijela jednako je:

$$T = t + t' = 3.15s$$ (2p)

4. Sila zatezanja užeta ima pravac duž užeta o koje okačeno tijelo. S toga postoji i horizontalna i vertikalna komponenta sile zatezanja užeta. Tijelo se kreće ravnomjernom brzinom, pa postoji samo centripetalno ubrzanje, tj postoji sila koja djeluje u x pravcu. U y pravcu težina tijela je uravnotežena sa vertikalnom komponentom sile zatezanja užeta (isti intenzitet, suprotan smjer), pa se može pisati:

$$\sum F_x = F_T \sin\beta = ma_c = m\frac{\upsilon^2}{R} = m\frac{\left(\frac{2R\pi}{T}\right)^2}{R} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$\sum F_y = F_T \cos\beta + (-mg) = 0$$



(5p)

Izražavanjem perioda iz prve jednačine, dobija se:

$$T = \sqrt{m\frac{4\pi^2 R}{F_T \sin\beta}}$$

(5p)

Iz druge jednačine, se može izraziti sila zatezanja užeta i uvrstiti u gornju jednačinu, s obzirom da se traži zavisnost T od β i L:

$$F_T = \frac{mg}{\cos\beta}$$

$$T = \sqrt{m\frac{4\pi^2 R}{\frac{mg}{\cos\beta}\sin\beta}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{g \cdot tg\alpha}}$$

(5p)

Ako se posmatra pravougli troguao, gdje je hipotenuza dužina niti (klatna), a naspramna kateta R (poluprečnik po kojoj se kuglica kružno kreće) u odnosu na ugao za koji je otklonjeno klatno, može se pisati:

$$R = L\sin\beta$$

I uvrstiti u gornju relaciju:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 L\sin\beta}{g \cdot tg\beta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\beta}{g}}$$

(5p)

Što je jednačina slična jednačini koja se koristi na laboratorijskim vježbama za određivanje gravitacionog ubrzanja, s tim što u jednačini za period matematičkog klatna nije figurisan član cos β, jer se klatno izvodi iz ravnotežnog položaja za veoma mali ugao. Taj ugao najviše treba da iznosi 5^0. A kosinus ugla od 5^0 je približno jednak 1, pa se umjesto gornje relacije, period matematičkog klatna računa preko:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{jer je } \cos 5^0 = 0.996 \approx 1$$

5. Neka se početni položaj kamena poklapa sa početkom koordinatnog sistema prikazanog na slici. Tačka u kojoj kamen pada u vodu ima koordinate *x=d* i *y=-H*. Vrijeme trajanja leta kamena može se odrediti iz relacije:

$$y = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Iz uslova *y=-H*, slijedi:

$$-H = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

gdje se za traženo vrijeme dobijaju dva rješenja, od kojeg je jedno pozitivno a drugo negativno:

$$t_{1,2} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha \pm \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2gH}}{g}$$ Negativno rješenje odbacujemo, jer je fizički nerealno.

U tom trenutku tijelo ima *x koordinatu*:

$$x = \upsilon_0 t\cos\alpha \Rightarrow d = \upsilon_0 t\cos\alpha$$

Uvrštavanjem dobijenog vremena u gornju jednačinu dobija se:

$$d = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot \left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}}{g} \right) \textbf{(4p)}$$

$$d = 95.6m$$

Kamen će se naći na visini h iznad vode poslije vremena:

$$t_h = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha + 2g(H - h)}}{g} = 4.3s \ \textbf{(4p)}$$

gdje je opet uzeto u obzir samo pozitivno rješenje kao realno. Intenzitet brzine kamena u trenutku pada u vodu možemo naći pomoću zakona održanja energije:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgy \Rightarrow \frac{m\upsilon_0^2}{2} + mgH = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Iz čega je intenzitet brzine jednak:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH} = 37.5 \frac{m}{s} \ \textbf{(3p)}$$

X komponenta brzine u trenutku udara kamena u vodu iznosi:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha = 20.5 \frac{m}{s} \ \textbf{(3p)}$$

Y komponenta brzine u trenutku udara kamena u vodu iznosi:

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt = -31.5 \frac{m}{s} \ \textbf{(3p)}$$

Smjer vektora brzine je određen uglom koji zaklapa u odnosu na pozitivni dio x ose:

$$\theta = arctg\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \right) = -56.9^0 \ \textbf{(3p)}$$